INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION 1980

MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 4

PROBLÈME N° 1

Soit $C = \{ c_1, c_2, ..., c_n \}$ un ensemble de n couleurs distinctes ($n \in \mathbb{N}^*$).

Une urne contient deux boules de couleur c_1, deux boules de couleur c_2, ..., deux boules de couleur c_n, soit $2n$ boules, dont exactement deux par couleur de C. On notera E_n l'ensemble de ces boules.

On vide l'urne en prenant les boules deux par deux, au hasard, avec à chaque tirage une probabilité égale de prendre n'importe quelle paire de boules disponibles.

On dira que deux boules d'une même couleur forment une paire homogène.

I. 1° De combien de façons différentes peut-on vider l'urne?

2° En déduire le nombre h_n de partitions de E_n formées de n parties à deux éléments.

3° Écrire h_n sous la forme d'un produit d'entiers naturels.

II. 1° Quelle est la probabilité de prendre ensemble les deux boules de couleur c_1 au premier tirage?

2° Même question, mais au deuxième tirage.

3° Généraliser.

4° En déduire la probabilité de prendre ensemble, au cours du vidage, les deux boules de couleur c_1.

III. Pour la suite, on notera $p_{k,n}$ la probabilité de tirer exactement k paires homogènes au cours du vidage.

1° Calculer $p_{n,n}$

2° Calculer $p_{n-1,\ n}$

3° Calculer $p_{0,\ 2}$ et en déduire $p_{n-2,\ n}$

4° Montrer que, pour $k \neq 0$, $p_{k,n} = \dfrac{p_{0,\ n-k}}{k!} \prod_{i=1}^{k} \left(\dfrac{n+1-i}{2(n+1-i)-1} \right)$

IV. Des calculs sur ordinateur suggèrent que la suite numérique des $p_{0,n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est croissante, à partir du quatrième terme.

Montrer que, si cette hypothèse est véridique, la suite des $p_{0,n}$, privée de ses trois premiers termes, est majorée par $e^{-\frac{1}{2}}$.

PROBLÈME N° 2

Soient deux réels a et b tels que $0 < a < e^b$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations suivantes :

$$u_0 = a(b - \operatorname{Log} a)$$

et pour $n \geq 1$, $\quad u_n = u_{n-1}(b - \operatorname{Log} u_{n-1})$

1° Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

2° Calculer sa limite.

.../...

PROBLÈME N° 3

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ définie pour tout x réel par : $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

I. Montrer que f est :

1° Indéfiniment dérivable (on établira que la dérivée d'ordre n (pour $n \geqslant 2$) de f est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times Q_n(x)$$

où $Q_n(x)$ est une fraction rationnelle dont le polynôme dénominateur n'a aucune racine réelle.

2° Strictement croissante et convexe.

3° Une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

4° L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est-elle convergente?

II. Représenter le graphe de f dans un repère orthonormé, après avoir étudié les deux branches infinies.

III. 1° Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.

2° Expliciter la bijection g de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, réciproque de la bijection f.

3° Démontrer l'équivalence :

$$[f(x) \in \mathbb{Q}^*] \Leftrightarrow [x \in \mathbb{Q} \text{ et } \sqrt{x^2+1} \in \mathbb{Q}]$$

4° En déduire l'ensemble de tous les couples (x, z) de rationnels positifs vérifiant $x^2 + 1 = z^2$.

5° Soit a un rationnel quelconque; déterminer l'ensemble de tous les couples de rationnels positifs (x, z) vérifiant :

$$x^2 + a^2 = z^2$$

6° En déduire l'ensemble des triplets (x, y, z) d'entiers naturels vérifiant :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Indications : On pourra remarquer en le justifiant que si $\frac{p}{q}$ est un quotient d'entiers, non nul, et irréductible les nombres $\frac{p^2 + \varepsilon q^2}{2pq} \notin \mathbb{N}$ (où $\varepsilon \in \{-1, +1\}$).

On distinguera ensuite selon que p et q sont ou ne sont pas tous les deux impairs.

On pourra facultativement remarquer que le passage d'un cas à l'autre équivaut à l'interversion des rôles de x et de y.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail